6.3.3 Binomická rovnice

Předpoklady: 6302

Binomická rovnice je každá rovnice, kterou lze napsat ve tvaru $x^n - a = 0$, $a \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}; n > 1$.
Například:

- $x^6 - 1 = 0$,
- $x^{12} - 2 - i = 0$,
- …

Jak najít řešení rovnice $x^n - a = 0$?
Převedeme: $x^n = a$.
Nápad: Umocňování je snazší v goniometrickém tvaru $\Rightarrow$ převedeme *x* i *a* do goniometrického tvaru:

- $x = |x| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
- $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Dosadíme do rovnice $x^n = a$: $\left[|x|(\cos\varphi + \sin\varphi)\right]^n = \left[|a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right]$.

Levou stranu můžeme umocnit $\Rightarrow$ $|x|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, máme rovnost dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru, pravé číslo známe, levé chceme určit.
Kdy se rovnají dvě komplexní čísla v goniometrickém tvaru?
a) Rovnají se jejich absolutní hodnoty.

$|x|^n = |a|$ Obě čísla jsou kladná $\Rightarrow$ rovnici můžeme odmocnit.

$\sqrt[n]{|x|^n} = \sqrt[n]{|a|}$

$|x| = \sqrt[n]{|a|}$ Určili jsme absolutní hodnotu hledaného čísla *x* (půl práce je hotovo).

b) Rovnají se jejich argumenty (nebo se liší o 2π).
$n\varphi = \alpha$ nebo $n\varphi = \alpha + 2\pi$ nebo $n\varphi = \alpha + 4\pi$ nebo …
$\Rightarrow$ Všechny možnosti zapíšeme pomocí parametru: $n\varphi = \alpha + k \cdot 2\pi$ $k \in Z$.

Vypočteme φ: $\varphi = \dfrac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}$ $\Rightarrow$ určili jsme argument hledaného čísla *x*.

$\Rightarrow$ Dáme oba výsledky dohromady:

$$x = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right),\ k \in Z$$

(absolutní hodnota je určena jednoznačně, argumentů je zřejmě nekonečně mnoho kvůli periodicitě goniometrických funkcí).

Vyzkoušíme postup na nějaké jednoduché rovnici:
$x^4 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1$
Převedeme na goniometrický tvar: $a = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$.
Určíme absolutní hodnotu *x*: $|x| = \sqrt[n]{1} = 1$.

Určíme argument x: $\alpha = 0$, $\varphi_k = \dfrac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}$, $k \in Z$ $\Rightarrow$ řešení bude víc $\Rightarrow$ určíme první z argumentů pro $k = 0$:

$\varphi_o = \dfrac{0 + 0 \cdot 2\pi}{4} = 0$ $\qquad$ $x_1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$ (ten bychom uhádli z hlavy).

Pokračujeme dál:

$k = 1$ $\qquad$ $\varphi_1 = \dfrac{0 + 1 \cdot 2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $x_1 = 1 \cdot \left(\cos \cdot \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2} \right) = i$

$k = 2$ $\qquad$ $\varphi_2 = \dfrac{0 + 2 \cdot 2\pi}{4} = \pi$ $\qquad$ $x_2 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -1$

$k = 3$ $\qquad$ $\varphi_3 = \dfrac{0 + 3 \cdot 2\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi$ $\qquad$ $x_3 = 1\left(\cos \dfrac{3}{2}\pi + i \sin \dfrac{3}{2} \right) = -i$

$k = 4$ $\qquad$ $\varphi_4 = \dfrac{0 + 4 \cdot 2\pi}{4} = 2\pi$ $\qquad$ $x_4 = 1(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1$ to je x_0

$k = 5$ $\qquad$ $\varphi_5 = \dfrac{0 + 5 \cdot 2\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{2}$ $\qquad$ $x_5 = 1\left(\cos \dfrac{5}{2}\pi + i \sin \dfrac{5}{2}\pi \right) = i$ to je x_1

Získali jsme jenom čtyři různá čísla, pak se výsledky začaly opakovat. V našem případě $k = 4 = n$.

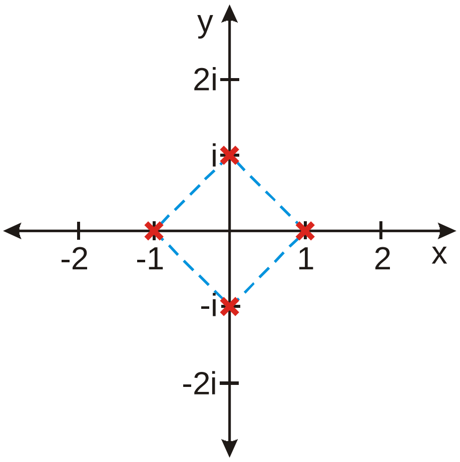
Ověříme obecně $\varphi_n = \dfrac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} = \dfrac{\alpha + n \cdot 2\pi}{n} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{n \cdot 2\pi}{n} = \dfrac{\alpha}{n} + 2\pi$ - stejný výsledek jako pro $k = 0$ $\Rightarrow$ má smysl počítat pouze prvních n kořenů.

Binomická rovnice $x^n - a = x^n - |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = 0$ má v oboru komplexních čísel právě *n* různých kořenů, a to $x = |x| = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} \right)$, $k = 0; 1; 2; \ldots; n-1$.

Poznámka: Řešení rovnice $x^n = a$ je vlastně hledáním n-té odmocniny z čísla a v komplexním oboru. V komplexních číslech tedy pro každé číslo a platí, že k němu existuje n různých n-tých odmocnin (takovou krásnou symetrii jsme v reálných číslech neměli).

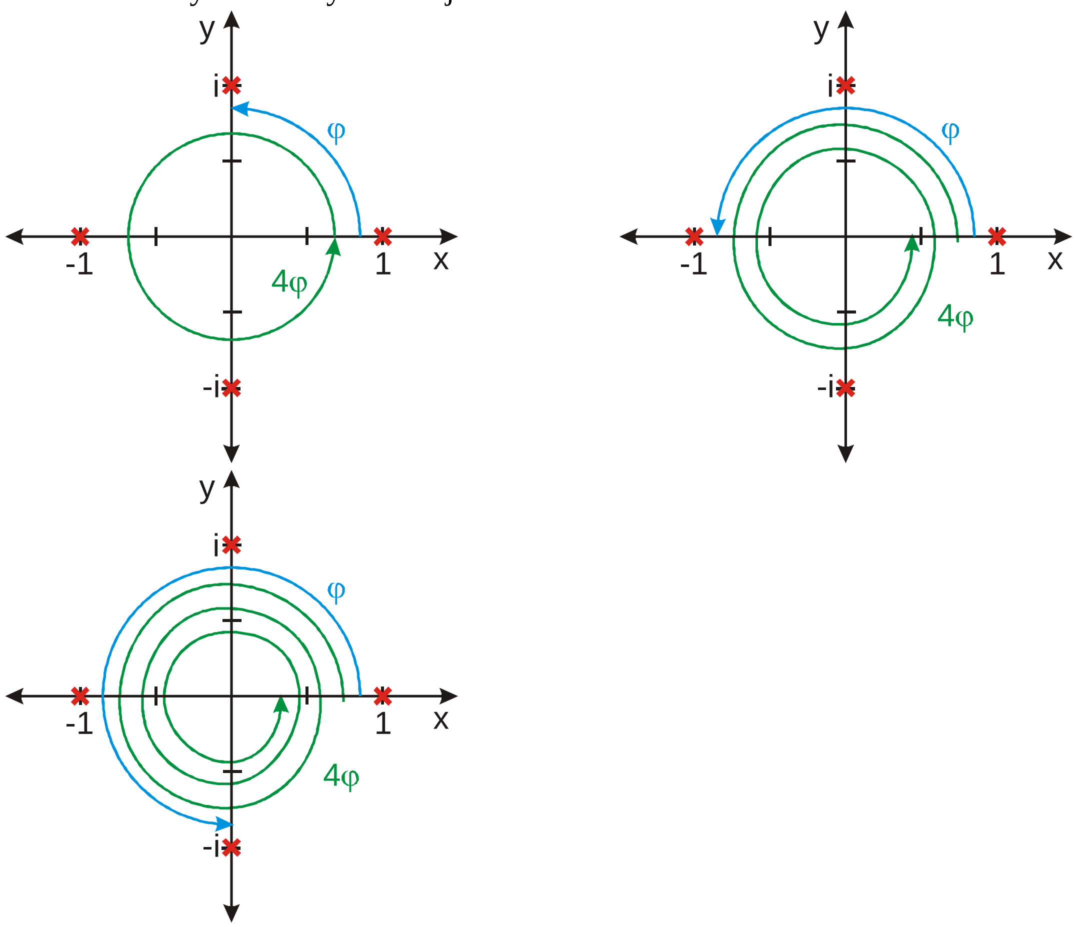
Pedagogická poznámka: Při výkladu nechávám studenty dopočítávat kořeny pro $k > 1$ samostatně.

Př. 1: Zakresli do Gaussovy roviny obrazy kořenů binomické rovnice $x^4 - 1 = 0$.



Obrazy kořenů tvoří vrcholy čtverce.

Předchozí obrázek může dobře posloužit i k názorné demonstraci toho, jak umocnění na čtvrtou může z různých čísel vyrobit stejné číslo.



Př. 2: Vyřeš rovnici: $x^3 + 27 = 0$. Zakresli obrazy kořenů do Gaussovy roviny.

Rovnici upravíme, aby bylo vidět číslo a: $x^3 + 27 = x^3 - (-27) = 0$.

Goniometrický tvar: $a = -27 = 27(\cos\pi + i\sin\pi)$.

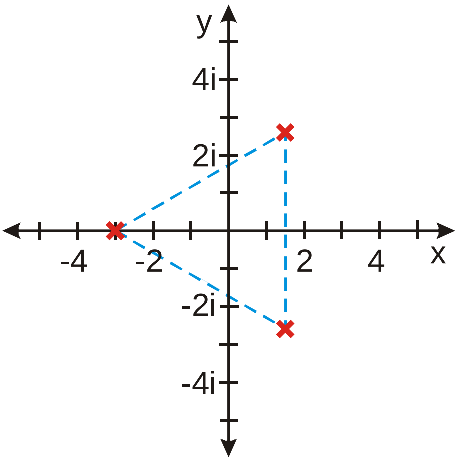
Absolutní hodnota: $|x| = \sqrt[3]{27} = 3$.

Argumenty:

$k = 0 \quad \varphi_0 = \frac{\pi + 0 \cdot 2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \qquad x_0 = 3 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$k = 1 \quad \varphi_1 = \frac{\pi + 1 \cdot 2\pi}{3} = \pi \qquad x_1 = 3 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -3$

$k = 2 \quad \varphi_2 = \frac{\pi + 2 \cdot 2\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi \qquad x_2 = 3 \cdot \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi \right) = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}$



Obrazy kořenů tvoří vrcholy rovnoramenného trojúhelníku.

Př. 3: Jaký obrazec tvoří v Gaussově rovině obrazy kořenů binomické rovnice?

Obrazy kořenů binomické rovnice $x^n - a = 0$ tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka, který je vepsán do kružnice se středem v počátku poloměrem $r = \sqrt[n]{|a|}$.

Př. 4: Vyřeš rovnici: $x^4 - \sqrt{8} + i\sqrt{8} = 0$. Zakresli obrazy kořenů do Gaussovy roviny.

Upravíme rovnici, abychom viděli číslo a: $x^4 - \sqrt{8} + i\sqrt{8} = x^4 - \left(\sqrt{8} - i\sqrt{8}\right) = 0$.

Goniometrický tvar: $a = \sqrt{8} - i\sqrt{8} = 4\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$.

Absolutní hodnota: $|x| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

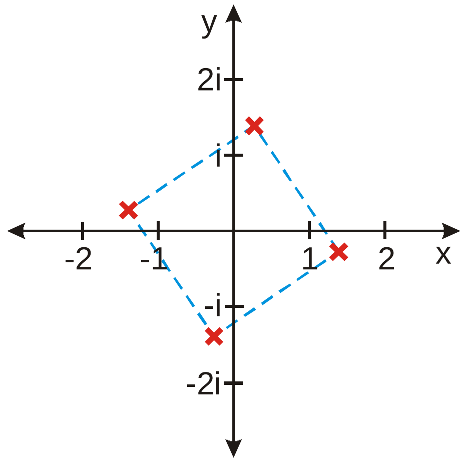
Argumenty:

$k = 0 \quad \varphi_0 = \frac{\frac{7}{4}\pi + 0 \cdot 2\pi}{4} = \frac{7}{16}\pi \qquad x_0 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7}{16}\pi + i \sin \frac{7}{16}\pi \right)$

$k = 1 \quad \varphi_1 = \frac{\frac{7}{4}\pi + 1 \cdot 2\pi}{4} = \frac{15}{16}\pi \qquad x_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{15}{16}\pi + i \sin \frac{15}{16}\pi \right)$

$k = 2 \quad \varphi_2 = \frac{\frac{7}{4}\pi + 2 \cdot 2\pi}{4} = \frac{23}{16}\pi \qquad x_3 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{23}{16}\pi + i \sin \frac{23}{16}\pi \right)$

$k = 3$ $\varphi_3 = \dfrac{\frac{7}{4}\pi + 3 \cdot 2\pi}{4} = \dfrac{31}{16}\pi$ $x_4 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{31}{16}\pi + i\sin\dfrac{31}{16}\pi\right)$



Př. 5: Petáková:
strana 140/cvičení 68 c) d)
strana 140/cvičení 69 b) d)
strana 140/cvičení 70 a)

Shrnutí: